



Extramaterial till Matematik Gamma

NIVÅ
TRÄNA
UTVECKLA

Sannolikhet och slump

LÄRARE

Du och dina elever kommer nu att få bekanta er med Google Kalkylark. Eleverna kommer bland annat få lära sig hur man med hjälp av olika formler kan slumpa fram tal och på så sätt kan ”singla slant” och skapa en digital tärning. Kalkylprogrammet kan sedan hjälpa eleverna att kasta tio eller till och med hundra tärningar samtidigt. De får även träna på att beräkna sannolikheten för olika händelser. I Utveckla får eleverna beräkna sannolikheten för olika summor vid kast med två tärningar samtidigt. Med hjälp av sina digitala tärningar genomför de kasten och jämför resultatet med den beräknade sannolikheten.

Elevuppgifterna finns i två nivåer, Träna och Utveckla. Vi föreslår att du samråder med eleverna om vilken nivå de ska arbeta med beroende på vilka förkunskaper de har.

Förutom elevuppgifterna finns även en ”lathund” (”Google Kalkylark”) där de viktigaste funktionerna finns beskrivna.

SYFTE

Syftet med övningen är att eleven ska

- bekanta sig med ett kalkylprogram.
- lära sig att skriva in värden i ett kalkylark.
- träna på att använda begreppen slump och sannolikhet.
- förstå skillnaden mellan antal gynnsamma utfall och antal möjliga utfall.
- veta hur man beräknar sannolikheten för en händelse.
- få erfarenhet av att använda formler för att slumpa fram tal.
- få erfarenhet av att kopiera en formel till flera celler i kalkylarket.
- lära sig att sammanställa värden i en tabell med hjälp av ett kalkylprogram.
- få jämföra och diskutera resultatet med en klasskamrat.

I UTVECKLA även:

- få erfarenhet av att använda och anpassa formler för att slumpa fram tal.
- träna på att beräkna sannolikheten för en händelse och ange svaret i decimalform och procentform.

TIDSÅTGÅNG

En lektion à 60 min.

KOSTNAD

Gratis

UTRUSTNING

Datorer eller lärplattor samt Google Kalkylark

REDOVISNING

Det finns många olika sätt att redovisa sina lösningar. Förslagsvis skriver eleverna ned svaren på enskilda uppgifter i sina räknehäften. Man kan även låta eleverna delge varandra sina olika lösningar genom att till exempel redovisa i mindre grupp eller helklass. Följ gärna upp med gemensamma diskussioner.

Eleverna kan dela sina kalkylark med läraren genom att klicka på "Dela" högst upp till höger och ange lärarens mailadress.



Under lektionens gång kan du gå runt och titta på elevernas kalkylark och lyssna på hur de argumenterar för sina beräkningar. Uppmuntra dem till att använda sig av matematiska begrepp. Be dem berätta för dig vad de gjort och hur de tänkt.

FALLGROPAR

Alla formler måste inledas med likhetstecken (=) för att de ska fungera.

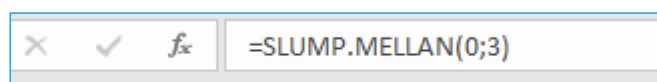
Var noga med vilka tecken som används så ingen skriver kolon (:) istället för semikolon (;).

PEDAGOGISKA TIPS

Testa gärna verktyget själv först. Då får du en förning om vilka eventuella problem eleverna kommer att stöta på.

Visa gärna de viktigaste funktionerna för eleverna i helklass innan ni sätter igång. I lathunden finns en beskrivning av Google Kalkylark som kan användas som underlag för genomgång.

Det finns andra program/appar som fungerar ungefär likadant som Google Kalkylark. Vissa formler kan behöva anpassas innan man använder ett annat kalkylprogram. Ett exempel från Excel:



FÖRMÅGOR

- använda och beskriva matematiska begrepp och samband mellan begrepp,
- välja och använda lämpliga matematiska metoder för att göra beräkningar och lösa rutinuppgifter,
- föra och följa matematiska resonemang,
- använda matematikens uttrycksformer för att samtala om och redogöra för frågeställningar, beräkningar och slutsatser.

CENTRALT INNEHÅLL

- Tal i procentform och deras samband med tal i bråk- och decimalform.
- Slumpmässiga händelser, chans och risk med utgångspunkt i observationer, simuleringar och statistiskt material. Jämförelse av sannolikhet vid olika slumpmässiga försök.
- Tabeller och diagram för att beskriva resultat från undersökningar, såväl med som utan digitala verktyg. Tolkning av data i tabeller och diagram.

Sannolikhet och slump

DEL 1: Singla slant

- Eleverna diskuterar:
 - Har ni sett någon ”singla slant”? I vilket sammanhang? Varför singlar man slant?
Exempel på elevsvar: Innan en match när man singlar slant om vilka som ska börja med bollen.
 - Hur många *möjliga utfall* finns det?
Två (krona eller klave).
 - Repetera: Hur beräknar man sannolikheten för en händelse?
Sannolikheten för en händelse:
 $P(\text{händelse}) = \frac{\text{antalet gynnsamma utfall}}{\text{antalet möjliga utfall}}$
 - Hur stor är sannolikheten för varje möjligt utfall när man singlar slant?
Sannolikheten att få krona när man singlar slant:
 $P(\text{krona}) = \frac{\text{antalet gynnsamma utfall}}{\text{antalet möjliga utfall}} = \frac{1}{2} = 0,5 = 50 \%$
 $P(\text{klave}) = 50 \%$
- Eleven öppnar ett nytt Google Kalkylark och döper det.
- Eleven skriver formeln =randbetween(1;10) i cell A1.
- Eleven trycker ctrl+R (cmd+R) och observerar vad som händer i cell A1. Eleven vara sedan på frågorna:
 - Vad betyder de engelska orden *random* och *between*?
Random betyder slump (slumpmässig). Between betyder mellan.
 - Vad betyder formeln =randbetween(1;10)?
Formeln betyder att ett tal mellan 1 och 10 (fr o m 1 och t o m 10) ska slumpas fram. Det finns alltså 10 möjliga utfall.
- För att kunna använda programmet för att ”singla slant” behöver du skriva om formeln till =randbetween(1;2). Varför?
Eftersom det bara finns två möjliga fall.
- Nu ska du singla slant tio gånger. Vad borde utfallet bli (Hur många ”krona” respektive ”klave” borde ni få?). Är det helt säkert att du kommer få så många av varje sort? Diskutera.
Utfallet borde bli att man får fem av varje eftersom sannolikheten för krona/klave är 50 %. Dock är det sluppen som avgör så det behöver inte bli så. Det **kan** bli tio stycken ettor, men sannolikheten för det är inte så stor.
- Eleven ändrar formeln i A1 till =randbetween(1;2) och kopierar den till cellerna A2-A10.

8. Bestäm att 1 betyder krona och 2 betyder klave. Hur många krona respektive klave fick du?

Eleven redovisar sitt resultat.

9. Hur stor andel i procent blev krona respektive klave?

Beroende på resultatet på fråga 8.

Andelen beräknas genom att ta t ex antalet klave och dividera det med antalet försök (10). Svaret anges i procent.

10. Eleven lägger till två rubriker i cellerna C1 och D1.
11. Eleven redovisar sitt resultat från uppgift 8 och 9 i tabellen.
12. Eleven gör om försöket och fyller på med resultat i tabellen.
13. Eleven fortsätter tills hen har totalt tio resultat i din tabell.
14. Eleven jämför och diskuterat sina resultat med en klasskamrat.
15. Du har nu singlar slant totalt 100 gånger genom att singla slant tio gånger i taget, tio gånger. Skulle du kunna ha gjort på något annat vis? Testa!

Man skulle ha kunnat genomföra 100 försök på en gång genom att kopiera formeln till 100 celler direkt.

DEL 2: Kasta tärning

1. Hur många *möjliga utfall* finns det när man kastar en vanlig sexsidig tärning?

Det finns sex möjliga utfall.

2. Du vill ha en sexa. Hur många *gymsamma utfall* finns det?

Det finns ett gynnsamt utfall (eftersom det bara finns en sexa).

3. Hur stor är sannolikheten att få en sexa? Svara i bråkform.

$$P(\text{sexa}) = 1 / 6$$

4. Hur stor är sannolikheten i procent? Avrunda till heltal.

$$P(\text{sexa}) = 1 / 6 = 0,16666666... \approx 17 \%$$

5. Eleven öppnar ett nytt kalkylark och döper det.

6. Eleven tar hjälp av uppgifterna i Del 1 och formulerar en formel som slumpar fram resultatet av ett tärningskast med en vanlig sexsidig tärning.

Formel som kan användas: =randbetween(1;6)

7. Eleven kontrollerar om "tärningen" fungerar och felsöker om den inte gör det.

8. Tänk dig att du skulle kasta din tärning sex gånger. Går det att säga hur många ettor, tvåor, treor och så vidare du kommer att få? Varför? Varför inte?

Eftersom slumpen avgör, kan man inte säga vad resultatet kommer att bli.

9. Eleven genomför sex tärningskast och skriver ned resultaten.
Endera genom att klicka ctrl+R sex gånger eller genom att kopiera formeln till sex fält.

TIPS: Det går att ge olika resultat olika färg genom att använda sig av "Villkorsberoende formatering". Då lägger man till en ny regel och färg för varje möjligt resultat. Se mer om det i lathunden ("Google Kalkylark").

10. Tänk dig att du skulle kasta 100 tärningar. Hur många procent av dessa borde vara ettor, tvåor, treor och så vidare?

Sannolikheten att få en etta, två, trea, fyra, femma eller sexa är ca 17 %.

11. Eleven kopierar formeln till totalt 100 rutor.
12. Eleven sammanställer sitt resultat i en tabell.
13. Blev det som ni tänkt? Fick ni samma resultat?

Eleverna diskutera resultatet.

Resultatet skiljer sig antagligen väldigt åt, eftersom det till slut ändå är slumpen som avgör. Skillnaden mellan de olika resultaten brukar dock minska med antalet försök.

14. Vad tror ni skulle hända om man utökade försöket till 1 000 kast?

Se ovan.

TIPS: Lägg ihop flera elevers (eller t o m hela klassens försök) för att få fler kast.

Sannolikhet och slump

DEL 1: Formler för att slumpa fram tal

- Eleven diskuterar och skriver ned sina svar:
 - Hur räknar man ut sannolikheten för en händelse?
Sannolikheten för en händelse:
 $P(\text{händelse}) = \frac{\text{antalet gynnsamma utfall}}{\text{antalet möjliga utfall}}$
 - Vad menar man med antal *möjliga utfall* respektive *gynnsamma utfall*?
Använd gärna en vanlig sexsidig tärning som exempel.
Antalet möjliga utfall: På en sexsidig tärning finns det sex möjliga utfall eftersom den har sex sidor. Singlar man slant är antalet möjliga utfall bara två.
Antalet gynnsamma utfall: Om man slår en sexsidig tärning och vill ha en trea, är antalet gynnsamma utfall 1 (eftersom det bara finns en trea). Om man däremot vill ha ett värde över fyra, är antalet gynnsamma utfall 2 (eftersom det finns två resultat som är gynnsamma - fem och sex).
 - Vad menas med att ”slumpa fram tal”?
När man slumpar fram ett tal är det inget annat som bestämmer vad värdet ska bli förutom slumpen. Slumpen tar inte hänsyn till vilka tal som tidigare slumpats fram. Jämför med om man ska ”tänka på ett tal”, så kanske man väljer ett tal som betyder något för en, sitt ”lyckotal”, eller ett tal som ingen annan tagit redan.
- Eleven öppnar ett nytt Google Kalkylark och döper det.
- Eleven skriver formeln =randbetween(1;10) i cell A1.
- Eleven trycker ctrl+R ett tiotal gånger och observerar vad som händer i cell A1.
Eleven svarar sedan på frågorna:
 - Vad betyder det engelska orden *random* och *between*?
Random betyder slump (eller slumpmässig). Between betyder mellan.
 - Vad betyder formeln =randbetween(1;10)?
Formeln betyder att ett tal mellan 1 och 10 (inklusive 1 och 10) ska slumpas fram. Det finns alltså 10 möjliga utfall.
- För att kunna använda programmet för att ”kasta tärning” behöver du skriva om formeln. Hur ska formeln anpassas för att kunna slumpa tärningskast med en vanlig sexsidig tärning?
=randbetween(1;6), eftersom en sexsidig tärning har sex möjliga utfall istället för tio.
- Eleven testar formeln och om ”tärning” fungerar.

DEL 2: Summan av tärningskast

1. Tänk dig att du ska kasta två sexsida tärningar och skriva ned summan av varje kast.

Vilka summor är möjliga att få? Skriv de olika summorna i ditt räknehäfte och jämför med en klasskamrat.

Möjliga summor: 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12.

2. Två av summorna är *minst sannolikt* (svårast) att få. Vilka och varför?

Summorna 2 och 12 är minst sannolikt att få eftersom det bara är när **båda** tärningarna visar 1 eller 6 som man kan få dessa summor.

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

3. Många tror att det finns 12 olika utfall när man kastar två tärningar. Hur många *möjliga utfall* finns det? Ta hjälp av tabellen ovan.

Det finns 36 möjliga utfall.

4. Hur räknar man ut sannolikheten för att få summan 2?

Svara med formeln $P(\text{summa } 2) =$.

$P(\text{summa } 2) = \frac{\text{antalet gynnsamma utfall}}{\text{antalet möjliga utfall}} = 1 / 36$

5. Använd en kalkylator för att beräkna sannolikheten för att få summan 2. Svara i decimalform och avrunda till två decimaler.

$P(\text{summa } 2) = 1 / 36 = 0,02777\ldots \approx 0,03$

6. Hur gör man från att växla från *decimalform* till *procentform*?

Man multiplicerar talet i decimalform med 100.

Exempel: $0,25 = 0,25 \cdot 100 = 25 \%$

7. Skriv sannolikheten för att få summan 2 i procentform.

$P(\text{summa } 2) = 1 / 36 = 0,02777\ldots \approx 0,03 = 3 \%$

8. Eleven använder kalkylarket för att skapa en tabell och fyller i alla möjliga summor när två tärningar kastas.

9. Vilken/vilka summor dyker upp

a) minst antal gånger?

2 och 12

b) flest antal gånger?

7

10. Vad betyder det för sannolikheten att få just den/de summorna?

Det betyder att sannolikheten är **minst** att få summan 2 eller 12 (eftersom det endast finns ett gynnsamt utfall för summan 2 respektive summan 12).
Sannolikheten är **störst** att få summan 7 (eftersom det finns fem gynnsamma utfall).

11. Beräkna sannolikheten för den vanligaste summan.

$$P(\text{summa } 7) = 5 / 36$$

$$P(\text{summa } 7) = 5 / 36 = 0,138888..... \approx 0,14 = 14 \%$$

12. Beräkna sannolikheten för de summor som är minst vanliga att få.

$$P(\text{summa } 12) = 1 / 36$$

$$P(\text{summa } 12) = 1 / 36 = 0,02777..... \approx 0,03 = 3 \%$$

$$P(\text{summa } 2) = \text{samma som ovan.}$$

13. Jämför sannolikheten. Hur många gånger större är sannolikheten att få det vanligaste värdet än något av de minst vanliga?

Sannolikheten att få summan 7 är fem gånger större än sannolikheten att få summan 2.

Sannolikheten att få summan 7 är fem gånger större än sannolikheten att få summan 12.

14. Lägg till tre rubriker till höger om den befintliga tabellen och fyll i de två första kolumnerna:

	J	K	L	
	Summa	Antal gynnsamma utfall	Sannolikhet	
	2	1		
	3	2		
	4	...		
	5			
	6			
	...			

15. Repetera:

Hur beräknar man sannolikheten för att få summan 2?

$$P(\text{summa } 2) = \text{antalet gynnsamma utfall} / \text{antalet möjliga utfall}$$

16. Ställ markören i L2. Vilken av dessa formler tycker du passar för att beräkna sannolikheten för att få summan 2?

a) $=J/6$

b) $=K/6$

c) $=J/12$

d) $=K/12$

e) $=J/36$

f) $=K/36$

Rätt svar: f), eftersom värdet för antalet gynnsamma utfall finns i cell K2 och antalet möjliga utfall är 36.

17. Eleven skriver in rätt formel i L2 och kopierar den till resten av kolumnen.

DEL 3: Summan av tärningskast med hjälp av kalkylark

1. Eleven behåller samma kalkylark och öppnar ett nytt blad.
2. Eleven skriver rubrikerna "Tärning 1" respektive "Tärning 2" i cellerna A1 och B1.
3. Eleven skriver in formeln för hur man slumpar ett värde mellan 1 och 6 i cell A2.
Eleven kopierar formeln till cell B2 och kontrollera att det fungerar genom att "kasta om tärningarna".
4. Eleven lägger till rubriken "Summa" i cell C1.
5. Eleven skriver formeln =SUM(A2:B2) i cell C2.
6. Vad händer när du trycker "enter" (eller klickar i en annan cell)?
Stämmer det? Testa genom att "kasta om tärningarna" fem gånger.
Summan av värdet i cell A2 och B2 redovisas i cell C2.
7. Tolka formeln =SUM(A2:B2). Vad betyder den?
=SUM(A2:B2) SUM betyder att värden ska summeras.
=SUM(A2:B2) A2:B2 anger i vilka celler värdena finns som ska summeras.
I det här fallet från och med cell A2 till och med cell B2.
Kommentar: Formeln =(A2+B2) fungerar också.
8. Eleven kopierar formeln från A2 till fler celler.
9. Eleven kopierar formlerna för kolumn B och C och kontrollerar att summorna i kolumn C stämmer.
Exempel på hur det kan se ut:

	A	B	C	
1	Tärning 1	Tärning 2	Summa	
2		6	1	7
3		3	6	9
4		2	5	7
5		3	5	8
6		1	3	4
7		6	1	7
8		4	5	9
9		1	1	2
10		1	5	6
11		4	5	9

10. Eleven utgår från sitt resultat av de tio slumpade tärningskasterna och beräknar andelen av varje summa. Exempel: Om hen har fått summan 7 tre gånger är andelen $3/10$ (eller 30 %).
11. Eleven jämför sitt resultat på uppgift 9 med den beräknade sannolikheten att få de olika summorna 2-12 (del 2, uppgift 17).
12. Eleven diskuterar likheter/skillnader i resultat med en klasskamrat.
Antagligen kommer resultatet skilja sig åt eftersom det är slumpen som avgör vad tärningarna visar och därmed vilken summa det blir. Kastar man tärningarna 36 gånger kan man inte säkert veta att man ska få summan 12 **en** gång.

- 13.** Eleven för resonemang kring vad som händer om man utökar antalet kast från 10 till 100 eller till och med 1 000.
Kommentar: Ju fler kast man genomför desto närmare kommer man den beräknade sannolikheten för de olika fallen.
- 14.** Eleven utökar antalet kast till 100 genom att kopiera formlerna till och med rad 101.
- 15.** Eleven sammanställer resultatet i en tabell.
TIPS: Man kan ta hjälp av kalkylarket för att räkna alla tvåor, treor, fyror osv. Se mer om det i lathunden "Google Kalkylark"
- 16.** Eleven jämför resultatet med resultatet av sina beräkningar i del 2, uppgift 17.